DERET FOURIER DENGAN PENDEKATAN NUMERIK MENGGUNAKAN METODE TRAPEZIUM

[1]Muhammad Razali✉, [2]Cut Latifah Zahari
[1]Universitas Pembinaan Masyarakat Indonesia, Medan, Indonesia
[2]Universitas Muslim Nusantara Al Washliyah, Medan, Indonesia
Email: razalialy@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.46880/methoda.Vol14No2.pp274-277

ABSTRACT

Fourier series has the ability to decompose a periodic function into a collection of sine and cosine wave sums. Another way to express a function into an infinite series is with the Maclaurin series or Taylor series but both of these series require that the function must have the first derivative, the second derivative and so on of the function is defined at its expansion point and there must be no discontinuity value at that point. However, the advantage of the Fourier series is that we can decompose the function into an infinite series containing the sum of sine and cosine terms even though the function cannot be differentiated and has discontinuity at some points. The Fourier series equation of an analytical function is obtained by first finding the values of the Fourier coefficients using analytical integrals. In the case of functions formed from numerical data that are assumed to have a periodic pattern, the Fourier series formula that uses analytical integrals to find its Fourier coefficients can no longer be used so that the numerical approach using the Trapezium method is an alternative that allows us to find the Fourier series equation for a periodic function expressed numerically. We use 12 points as the basis for the calculation in the Trapezium method to approximate the Fourier series numerically. This paper presents a numerical approach to solve the problem.
Keyword: *Fourier Series, Numerical Approach, Trapezium Method.*

ABSTRAK

Deret Fourier memiliki kemampuan menguraikan sebuah fungsi periodik menjadi kumpulan jumlah gelombang sinus dan cosinus. Cara lain menyatakan sebuah fungsi ke dalam deret tak hingga adalah dengan deret Maclaurin atau deret Taylor tetapi kedua deret ini mensyaratkan bahwa fungsi harus memiliki turunan pertama, turunan kedua dan seterusnya dari fungsi adalah terdefinisi pada titikekspansinya dan tak boleh ada nilai diskontinuitas pada titik tersebut. Namun kelebihan pada deret Fourier adalah kita dapat menguraikan fungsi ke dalam deret tak hingga yang memuat jumlah suku-suku sinus dan cosinus walaupun fungsi itu tak dapat diturunkan dan memiliki diskontinuitas pada sebagian titik. Persamaan deret Fourier dari fungsi analitik diperoleh dengan terlebih dahulu mencari nilai-nilai koefisien Fourier menggunakan integral analitik. Pada kasus fungsi yang terbentuk dari data numerik yang diasumsikan memiliki pola periodik, rumus deret Fourier yang menggunakan integral secara analitik untuk menemukan koefisien Fouriernya tak lagi dapat digunakan sehingga pendekatan numerik menggunakan metode Trapezium menjadi alternatif yang memungkinkan kita menemukan persamaan deret Fourier bagi fungsi periodik yang dinyatakan secara numerik. Kita menggunakan 12 titik sebagai dasar perhitungan dalam metode Trapezium untuk mengaproksimasi deret

Fourier secara numerik. Tulisan ini memaparkan pendekatan numerik untuk menyelesaikan masalah tersebut.
***Kata Kunci:** Deret Fourier, Pendekatan Numerik, Metode Trapezium.*

PENDAHULUAN

Di musik, sebuah nada yang memiliki frekuensi f, dimana kelipatan bulat dari frekuensi tersebut yaitu 2f, 3f, 4f dan dikenal dengan nama "Harmonik". Maksudnya adalah studi matematika yang mengamati gelombang yang tumpang tindih (*overlapping waves*) disebut analisis harmonik. Analisis harmonik ini merupakan bidang diskusi yang luas dan beragam dan dapat diterapkan untuk menghasilkan deret fourier. Pemrosesan sinyal, record medis, astronomi, optik dan mekanika kuantum adalah sebagian dari bidang ilmu yang menggunakan analisis harmonik secara intensif. Tulisan ini memaparkan metode singkat dari analisis harmonik menggunakan pendekatan metode numerik yaitu pendekatan aturan trapezium (Kreyszig, 2011).

Banyak bentuk gelombang praktis yang bersifat periodik dapat direpresentasikan dengan ekspresi matematika sederhana, dan dengan menggunakan deret Fourier, besarnya komponen harmonik ditentukan, Untuk bentuk gelombang yang tidak termasuk dalam kategori ini, analisis dapat dilakukan dengan pendekatan metode numerik. Analisis harmonik adalah proses untuk menyelesaikan gelombang periodik nonsinusoidal menjadi serangkaian komponen sinusoidal dengan urutan frekuensi menaik

HASIL DAN PEMBAHASAN

Deret Fourier Secara Analitik

Jika kondisiatau syarat tertentu dipenuhi, yaitu syarat Dirichlet, maka dimungkinkan untuk menuliskan sebuah fungsi periodik f(x) dengan periode 2π sebagai ekspansi deret tak hingga yang dinamakan deret Fourier, yaitu jika f(x) terdefinisi pada interval $-\pi \leq x \leq \pi$ di mana

$f(x + 2\pi n) = f(x)$, maka dalam deret Fourier secara analitik, fungsi f(x) dinyatakan secara matematis oleh persamaan:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx$$

Tiga koefisien $a_o, a_{n,}\, dan\, b_n$ disebut koefisien Fourier yang nilai-nilainya diperoleh dengan rumus:

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\ ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx$$

Nilai a_o sama dengan nilai rata-rata f(x) dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$ atau dalam interval

$-\pi \leq x \leq \pi$. Adapun deret Fourier fungsi periodik dengan periode T selain 2π dinyatakan oleh

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosn\omega x + b_n sinn\omega x$$

dimana $\omega = \frac{2\pi}{T}$

dengan nilai $a_o, a_{n,}\, dan\, b_n$ sebagai berikut (Stroud & Booth, 2020a):

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx\ ;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cosn\omega xdx\ ;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sinn\omega xdx$$

Deret Fourier Secara Numerik Dengan Pendekatan Aturan Trapezium

Pada kenyataannya bentuk gelombang periodik *iregular* seringkali muncul dan persamaan analitik gelombang tersebut tak bisa diketahui sehingga metode analitik dengan menggunakan kalkulus integral tak bisa digunakan dan harus dicari metode lain yang bersifat non-analitik, yaitu metode hampiran numerik menggunakan aturan Trapezium.

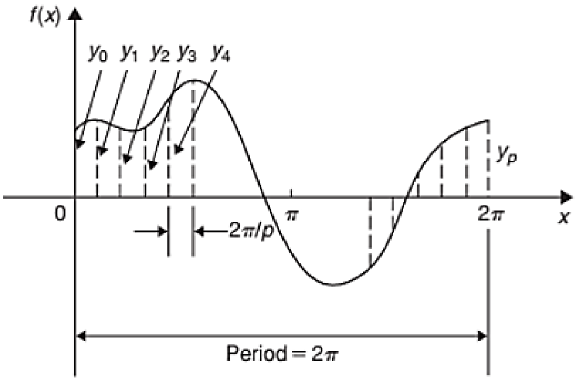
Kebanyakan bentuk gelombang praktis yang dianalisis adalah gelombang periodik. Misalnya periode gelombangnya 2π dan dibagi ke p sub-nterval yaitu $\frac{2\pi}{p}$. Misalkan nilai ordinat y = f(x) diberi label $y_o, y_1, y_2, \dots, y_p$ dengan catatan dimana $y_o = y_p$ berdasarkan alasan sifat periodik dimana nilai awal siklus akan kembali tumpang tindih pada nilai akhir siklus. Aturan Trapezium menyatakan bahwa:

Luas area dibawah kurva gelombang periodik =

$$Lebar\ interval \times [\frac{1}{2}(y_o + y_p) + (jumlah\ ordinat\ sisa)]$$

$$=\frac{2\pi}{p}[\frac{1}{2}(y_o + y_p) + y_1 + y_2 + \cdots + y_{p-1}]$$

Karena $y_o = y_p$ maka $\frac{1}{2}(y_o + y_p) = y_o = y_p$



Kemudian,

$$Luas\ area \approx \frac{2\pi}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k$$

Dan

$$Nilai\ rata-rata = \frac{Luas\ area}{panjang\ interval\ alas\ trapezium} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k$$

Mengingat bahwa koefisien Fourier $a_o = nilai\ rata-rata\ f(x)$ dalam interval dari 0 hingga 2π, jadi:

$$a_o = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \text{ .... (1)}$$

Demikian pula $a_n = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k cosnx_k$ ...... (2)

Dan b_n = dua kali nilai rata-rata f(x) dalam interval 0 hingga 2π.

Jadi

$$b_n = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k sin\ nx_k \text{ .... (3)}$$

Bila diringkas, nilai koefisien $a_o, a_n\ dan\ b_n$ dari deret Fourier yang dihampiri secara numerik dengan metode Trapezium dapat diperoleh dengan rumus-rumus ini (Washington, 1990):

$$a_o = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k$$

$$a_n = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k cosnx_k$$

$$b_n = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k sin\ nx_k$$

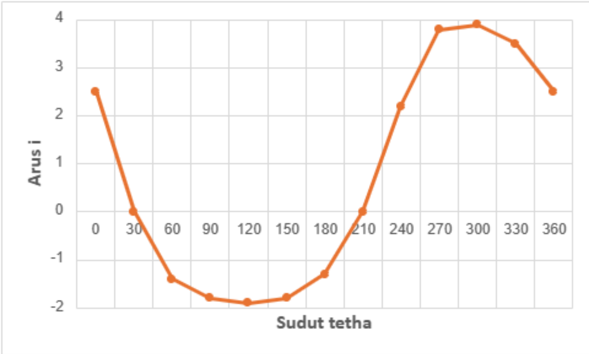
Ilustrasi dengan data numerik

Diberikan ilustrasi data numerik fluktuasi arus listrik yang di catat pada beberap sudut theta dalam interval satu siklus dari 0 – 360 derajat, datanya diberikan pada tabel berikut ini. Data dicatat pada tiap interval 30 derajat dan dan anggaplah fluktuasi berikutnya bersifat periodik pada interval berikutnya 360 – 720 dan seterusnya (Washington, 2013).

Sudut Tetha	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
Arus i	0	-1.4	-1.8	-1.9	-1.8	-1.3	0	2.2	3.8	3.9	3.5	2.5

Plot antara sudut θ pada sumbu horizontal dan arus i pada sumbu vertikal dengan Microsoft Excel seperti gambar-1 berikut ini:

ISSN: 2088-9534 *(media cetak)* – ISSN: 2656-6931 *(media online)*



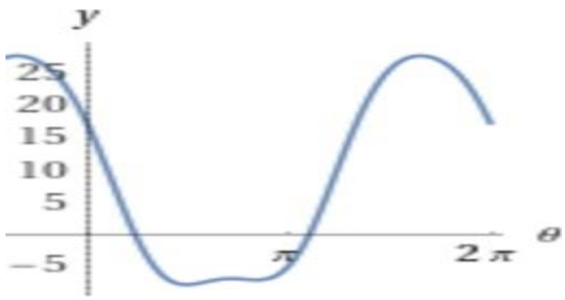
Menerapkan rumus rumus pendekatan numerik untuk $a_o, a_n \; dan \; b_n$ menggunakan Micsrosoft Excel diperoleh (Stroud & Booth, 2020b):

Thetaθ	i	cos	i.cosθ	cos2θ	i.cos2θ	cos3θ	i.cos3θ	sin θ	i.sin θ	sin2 θ	i.sin2θ	sin3θ	i.sin3θ
30	0	0.866	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000	0.500	0.000	0.866	0.000	1.000	0.000
60	-1.4	0.500	-0.700	-0.500	0.700	-1.000	1.400	0.866	-1.212	0.866	-1.212	0.000	0.000
90	-1.8	0.000	0.000	-1.000	1.800	0.000	0.000	1.000	-1.800	0.000	0.000	-1.000	1.800
120	-1.9	-0.500	0.950	-0.500	0.950	1.000	-1.900	0.866	-1.645	-0.866	1.645	0.000	0.000
150	-1.8	-0.866	1.559	0.500	-0.900	0.000	0.000	0.500	-0.900	-0.866	1.559	1.000	-1.800
180	-1.3	-1.000	1.300	1.000	-1.300	-1.000	1.300	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
210	0	-0.866	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000	-0.500	0.000	0.866	0.000	-1.000	0.000
240	2.2	-0.500	-1.100	-0.500	-1.100	1.000	2.200	-0.866	-1.905	0.866	1.905	0.000	0.000
270	3.8	0.000	0.000	-1.000	-3.800	0.000	0.000	-1.000	-3.800	0.000	0.000	1.000	3.800
300	3.9	0.500	1.950	-0.500	-1.950	-1.000	-3.900	-0.866	-3.377	-0.866	-3.377	0.000	0.000
330	3.5	0.866	3.031	0.500	1.750	0.000	0.000	-0.500	-1.750	-0.866	-3.031	-1.000	-3.500
360	2.5	1.000	2.500	1.000	2.500	1.000	2.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Total	7.700		9.490		-1.350		1.600		-16.391		-2.511		0.300

Persamaan hubungan antara sudut θ dengan arus i dengan pendekatan deret Fourier secara numerik.

$i(\theta) = 7.7 + 9.49\, cos\theta - 1.35\, cos2\theta + 1.6\, cos3\theta + \ldots.$

$- 16.391 sin\theta - 2.511\, sin2\theta + 0.3\, sin3\theta + \ldots..$



Grafik hasil persamaan deret fourier nmerik ini digambarkan dengan aplikasi dengan Wolfram Alpha (Crowe et al., 2002).

Secara konturnya jika dibandingkan kedua grafaik ini, yaitu grafik data asal dalam plot Excel dan grafik fungsi deret Fourier yang diperoleh secara numerik memberi hasil yang mirip, pendekatan secara numerik menampilkan hasil yang memuaskan.

KESIMPULAN

Banyak data numerik yang diasumsikan bersifat periodik tidak memiliki persamaan analitik sehingga pencarian deret Fourier tidak bisa dilakukan secara analitik menggunakan teknik hitung integral analitik untuk mencari koefisien-koefisien Fourier, tetapi dengan menggunakan pendekatan numerik, memanfaatkan metode Trapezium yang diterapkan untuk mendapatkan nilai-nilai koefisien Fourier secara hampiran, persamaan deret Fourier bagi data numerik yang periodik dapat ditemukan dengan hampiran yang memuaskan, walaupun studi lanjutan dapat dilakukan pada tingkat akurasinya dengan menganalisis tingkat *error* (galat) dalam metode hampiran ini. Metode ini menjadi salah satu jalan keluar dari kebuntuan dalam mencari deret Fourier dari data numerik yang diasumsikan bersifat periodik.

DAFTAR PUSTAKA

Crowe, D., Robertson, D. N., & Hwang, J. (2002). *Engineering Mathematics: A Foundation for Electronic, Electrical, Communications and Systems Engineers*. Prentice Hall.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics-pdf*.

Stroud, K. A., & Booth, D. J. (2020a). *Advanced engineering mathematics*. Bloomsbury Publishing.

Stroud, K. A., & Booth, D. J. (2020b). *Engineering mathematics*. Bloomsbury Publishing.

Washington, A. J. (1990). *Basic technical mathematics with calculus*. Benjamin/Cummings Publishing Company.

Washington, A. J. (2013). *Basic Technical Mathematics with Calculus*. Pearson Higher Ed.